Gruppentheorie

Damian Osajda
damian.osajda@univie.ac.at
http://www.math.uni.wroc.pl/∼dosaj/GGTWien/dyd/Course.html
Dienstag, 12:45–13:30
Seminarraum 11 Oskar-Morgenstern-Platz 1 2.Stock

Blatt 6

Satz (P. Hall)**.** *Sei G eine auflösbare Gruppe mit $|G| = ab$, wo ggt$(a, b) = 1$. Dann besitzt G eine Untergruppe der Ordnung a und je zwei solche Untergruppen sind konjugiert in G.*

(1) (*Frattini-Argument*) Sei F eine endliche Gruppe, H eine normale Untergruppe von F, und P eine Sylow p–Untergruppe von H. Zeige, daß $F = N_F(P)H$.
(2) Sei H eine minimale normale Untergruppe von G. Zeige, daß:
  (a) $H^{(1)} = \{1\}$ oder $H^{(1)} = H$;
  (b) $H^{(1)} = \{1\}$, sodaß H abelsch ist;
  (c) $H = \mathbb{Z}_p^k$.
(3) Sei H eine normale Untergruppe von G mit $|H| = a'b'$, wo $a'|a$, $b'|b$ und $b' < b$. Sei G/H besitzt eine Untergruppe der Ordnung a/a'. Zeige, daß es eine Untergruppe von G der Ordnung a gibt.
(4) Sei $H \lhd G$ mit $b \nmid |H|$. Dann besitzt G eine Untergruppe der Ordnung a.
(5) Sei $|G| = ap^m$ mit $p \nmid a$. Sei $H \lhd G$ eine p–Sylow-Untergruppe, die einzelne minimale normale Untergruppe ist.
  (a) Sei K/H eine minimale normale Untergruppe von G/H. Zeige, daß $|K| = p^m q^n$, für ein Primzahl $q \neq p$;
  (b) Sei Q eine q–Sylow-Untergruppe von K. Zeige, daß $K = HQ$;
  (c) Zeige, daß $G = KN_G(Q)$;
  (d) Zeige, daß $|N_G(Q)| = a|H \cap N_K(Q)|$;
  (e) Zeige, daß $H \cap N_K(Q) < Z(K)$;
  (f) Zeige, daß $Z(K) = \{1\}$;
  (g) Zeige, daß $|N_G(Q)| = a$.
(6) Zeige, daß G besitzt eine Untergruppe der Ordnung a.